علامہ اقبال اوپن یونیورسٹی، اسلام آباد
شعبۂ ریاضی • کلیۂ سائنس

کاروباری ریاضی

اہم ترین سوالات --- مختصر ایڈیشن

کورس کوڈ 1429 (بعض اوقات 5405)

نو یونٹ • سولہ سوالات • بی اے، بی کام، اے ڈی سی، بی ایس

یہ کتابچہ کیا ہے؟ اے آئی او یو کی سرکاری درسی کتاب کاروباری ریاضی (کورس کوڈ 5405/1429، اشاعت 2023) کے ہر یونٹ کے آخر میں دیے گئے Self Assessment Questions میں سے **سولہ سب سے اہم** سوالات کا مختصر حل۔ یونیورسٹی اسائنمنٹ اور فائنل پرچہ اسی ذخیرے سے بناتی ہے۔

انتخاب کیسے ہوا؟ پرچے کے وزن کے مطابق۔ یونٹ 6 (محدد، معکوس، کریمر) سے تین سوال؛ یونٹ 1، 4، 7 اور 9 سے دو دو؛ باقی سے ایک ایک۔

تین ایڈیشن۔ یہ سب سے مختصر ہے۔ اس سے تفصیلی اردو ایڈیشن (27 سوالات) AIOU_1429_Urdu_Guess_Paper.pdf میں اور مکمل انگریزی حل (84 صفحات) AIOU_1429_Solved_QuestionBank.pdf میں ہیں۔

حیثیت۔ ذاتی مطالعے کے لیے۔ یہ اے آئی او یو کی مطبوعہ کتاب نہیں۔ اسے من و عن نقل کر کے اسائنمنٹ میں جمع کرانا منع ہے۔

پہلے یہ پڑھ لیجیے

سوال پڑھیے۔ حل کو کاغذ سے ڈھانپیے۔ پہلے خود کاپی پر حل کیجیے، پھر ملائیے۔ صرف حل پڑھ لینے سے سیکھنے کا گمان ہوتا ہے؛ امتحان میں وہی کام آتا ہے جو ناکام کوشش کے بعد سمجھ آیا ہو۔

- **سبز خانہ** --- آخری جواب، تاکہ طریقہ پڑھے بغیر اپنا نتیجہ ملا سکیں۔
- **پڑتال** --- جواب کو اصل مساوات میں واپس رکھ کر جانچ۔ اے آئی او یو طریقۂ کار کے نمبر دیتی ہے، اور پڑتال سے علامت کی غلطی ممتحن سے پہلے پکڑ میں آ جاتی ہے۔
- **سرخ خانہ** --- اس قسم کے سوال کی مخصوص غلطی۔ آخری صفحے پر ان کی مکمل فہرست ہے۔

پرچے میں کس یونٹ کا کتنا وزن ہے

یونٹ اور موضوع	وزن	سوالات	اصل امتحان کس چیز کا ہے
1 احتمال	زیادہ	2	جمع کا اصول بمقابلہ ضرب کا اصول
2 بے ترتیب متغیر	درمیانہ	1	احتمالات کا مجموعہ ہمیشہ 1
3 مساوات، عدم مساوات	درمیانہ	2	علامت کا الٹنا؛ مطلق قدر کی دو صورتیں
4 خطی مساوات	زیادہ	2	پہلے میلان، پھر ایک نقطہ
5 میٹرکس	زیادہ	1	ضرب کے لیے ابعاد کا میل
6 محدد اور معکوس	زیادہ	3	ہم عاملوں کی علامت؛ کریمر کا اصول
7 حد اور تفرق	زیادہ	2	تقسیم کے اندر زنجیری اصول
8 جزوی مشتق	درمیانہ	1	دوسرے متغیر کو ثابت رکھنا
9 بہتر بندی	زیادہ	2	دوسرے مشتق کی جانچ، ہمیشہ

اگر وقت بہت کم ہو تو یونٹ 6، 9، 4 اور 7 کو ترجیح دیجیے --- زیادہ تر نمبر اور تمام طویل سوالات انہی سے آتے ہیں۔

یونٹ 1: احتمال

چار اصول

$$P(A') = 1 - P(A)\,, \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \ \ (\text{آزاد}), \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

باہم خارج واقعات میں $P(A \cap B) = 0$، تب جمع کا اصول سادہ ہو جاتا ہے۔

سوال 1

ایک مرتبان میں 8 سبز نقطہ دار، 10 سبز دھاری دار، 12 نیلی نقطہ دار اور 10 نیلی دھاری دار گیندیں ہیں۔ ایک گیند بے ترتیب نکالی جائے تو احتمال کیا ہے کہ وہ **(الف)** سبز یا دھاری دار ہو، **(ب)** نقطہ دار ہو، **(ج)** نیلی یا نقطہ دار ہو؟

حل

پہلے دو رخی جدول بنائیے --- اس سوال کے سارے نمبر اسی قدم پر ملتے یا کھوتے ہیں۔

	نقطہ دار	دھاری دار	کل
سبز	8	10	**18**
نیلی	12	10	**22**
کل	**20**	**20**	**40**

(الف) سبز اور دھاری دار میں اشتراک ہے (10 گیندیں دونوں میں)، اس لیے عام جمع کا اصول:

$$P(G \cup S) = \tfrac{18}{40} + \tfrac{20}{40} - \tfrac{10}{40} = \tfrac{28}{40} = 0.70$$

(ب) $P(D) = \frac{20}{40} = 0.50$۔ **(ج)** اشتراک 12 نیلی نقطہ دار: $P(B \cup D) = \frac{22}{40} + \frac{20}{40} - \frac{12}{40} = 0.75$

✓ **پڑتال:** براہِ راست گنتی: $8 + 10 + 10 = 28$ اور $12 + 10 + 8 = 30$۔ مطابقت ہے۔

جواب: (الف) 0.70 (ب) 0.50 (ج) 0.75

عام غلطی

سادہ جمع کا اصول $P(A) + P(B)$ صرف باہم خارج واقعات پر چلتا ہے۔ اشتراک والے واقعات پر لگانے سے اشتراک دو بار گنا جاتا ہے --- اس یونٹ کی سب سے عام غلطی یہی ہے۔

سوال 2

اگر $P(E) = 0.2$، $P(F) = 0.5$ اور $P(E \cup F) = 0.6$ ہو تو نکالیے **(الف)** $P(E \cap F)$، **(ب)** $P(E \mid F)$، **(ج)** $P(F \mid E)$۔

حل

(الف) جمع کے اصول کو الٹ کر اشتراک کو مطلوب بنائیے:

$$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) = 0.2 + 0.5 - 0.6 = 0.1$$

(ب) $P(E \mid F) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$ **(ج)** $P(F \mid E) = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$

اضافی نمبر یہاں ملتے ہیں: $P(E \mid F) = 0.2 = P(E)$ اور $P(E)\,P(F) = (0.2)(0.5) = 0.1 = P(E \cap F)$۔ لہذا E اور F آزاد واقعات ہیں۔

جواب: (الف) 0.1 (ب) 0.2 (ج) 0.5؛ E, F آزاد ہیں۔

یونٹ 2: بے ترتیب متغیر

سوال 3

(الف) ایک کھرا سکہ تین بار اچھالا جاتا ہے؛ X چِتوں کی تعداد ہے۔ تقسیم بنائیے اور $P(X \geq 2)$ نکالیے۔ **(ب)** اگر $X = 0, 2, 4, 6, 8$ کے احتمالات $K,\ 2K,\ 4K,\ 2K,\ K$ ہوں تو K نکالیے۔ **(ج)** ایک تھیلے میں 4 سرخ اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ بغیر واپسی کے 4 گیندیں نکالی جاتی ہیں؛ X سرخ گیندوں کی تعداد ہے۔ $P(X = 2)$ نکالیے۔

حل

(الف) کل $2^3 = 8$ یکساں ممکن نتائج ہیں:

x	نتائج	تعداد	$P(X=x)$
0	TTT	1	1/8
1	HTT, THT, TTH	3	3/8
2	HHT, HTH, THH	3	3/8
3	HHH	1	1/8

"دو یا زیادہ" کا مطلب $X=2$ یا $X=3$، اور یہ باہم خارج ہیں:

$$P(X \geq 2) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} = 0.5$$

(ب) احتمالات کا مجموعہ 1 ہونا چاہیے:

$$K + 2K + 4K + 2K + K = 10K = 1 \implies K = 0.1$$

تقسیم: 0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1۔ یہ $x=4$ کے گرد متناسب ہے، اس لیے $E(X)=4$۔

(ج) بغیر واپسی کے نمونہ لینے سے یہ دو ذی حدی نہیں بلکہ hypergeometric تقسیم بنتی ہے:

$$P(X=x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{\binom{10}{4}}, \qquad \binom{10}{4} = 210$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{210} = \frac{6 \times 15}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

جواب: (الف) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$؛ $P(X \geq 2) = 0.5$ (ب) $K = 0.1$ (ج) $P(X=2) = \frac{3}{7} \approx 0.429$

عام غلطی

حصہ (ج) کو دو ذی حدی مان کر $p = 4/10$ لگانے سے 0.3456 آتا ہے --- غلط۔ دو ذی حدی کے لیے p کا ہر بار ایک جیسا رہنا ضروری ہے، جو صرف واپسی کے ساتھ ہوتا ہے۔ "بغیر واپسی" کے الفاظ دیکھتے ہی hypergeometric کی طرف جائیے۔

یونٹ 3: مساوات اور عدم مساوات

سوال 4

حل کیجیے: **(الف)** $t^2 + 4t = 21$ تحلیل سے، **(ب)** $4x^2 + 3x - 1 = 0$ دو درجی فارمولے سے۔

حل

(الف) پہلے سب کچھ ایک طرف --- تحلیل صرف صفر کے مقابل چلتی ہے۔ $t^2 + 4t - 21 = 0$۔ دو عدد جن کا حاصل ضرب -21 اور جمع $+4$ ہو: $+7$ اور -3۔

$$(t+7)(t-3) = 0 \implies t = -7 \text{ یا } t = 3$$

(ب) $a = 4,\ b = 3,\ c = -1$۔ پہلے ممیز، وہ بتاتا ہے جواب کس قسم کا آئے گا:

$$b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 > 0, \qquad x = \frac{-3 \pm 5}{8} \implies x = \tfrac{1}{4} \text{ یا } x = -1$$

✓ **پڑتال:** $(-7)^2 + 4(-7) = 21$؛ $4(\frac{1}{16}) + 3(\frac{1}{4}) - 1 = 0$۔

جواب: (الف) $t = -7,\ 3$ (ب) $x = \frac{1}{4},\ -1$

سوال 5

حل کیجیے: **(الف)** $6t^2 + t - 12 > 0$، **(ب)** $|2y + 5| = |y - 4|$، **(ج)** $|z^2 - 8| \le 8$۔

حل

(الف) ممیز $= 1 + 288 = 289$، $\sqrt{289} = 17$:

$$t = \frac{-1 \pm 17}{12} \implies t = \tfrac{4}{3} \text{ یا } t = -\tfrac{3}{2}$$

t^2 کا عامل $6 > 0$، اس لیے قطع مکافی اوپر کھلتا ہے: جڑوں کے درمیان محور سے نیچے، باہر اوپر۔ ہمیں > 0 چاہیے:

$$t < -\tfrac{3}{2} \quad \text{یا} \quad t > \tfrac{4}{3}$$

✓ **پڑتال:** $t = 0$ (جڑوں کے بیچ): -12، یعنی > 0 نہیں --- درست طور پر خارج۔

(ب) $|u| = |v|$ دو صورتوں میں بٹتا ہے: $2y + 5 = y - 4 \Rightarrow y = -9$؛ اور $2y + 5 = -y + 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$۔

(ج) $|u| \le a$ اندر کی طرف بند ہوتا ہے:

$$-8 \le z^2 - 8 \le 8 \implies 0 \le z^2 \le 16$$

بایاں حصہ ہر حقیقی z کے لیے خود بخود درست ہے؛ دایاں دیتا ہے $-4 \le z \le 4$۔

جواب: (الف) $t < -\frac{3}{2}$ یا $t > \frac{4}{3}$ (ب) $y = -9,\ -\frac{1}{3}$ (ج) $-4 \le z \le 4$

عام غلطی

$|u| \le a$ ایک وقفہ دیتا ہے؛ $|u| \ge a$ باہر کھل کر دو وقفے دیتا ہے۔ نیز منفی عدد سے ضرب یا تقسیم پر عدم مساوات کی علامت الٹ جاتی ہے۔

یونٹ 4: خطی مساوات

پہلے میلان، پھر ایک نقطہ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad y - y_1 = m(x - x_1), \qquad y = mx + c$$

متوازی: $m_1 = m_2$۔ عمود: $m_1 m_2 = -1$۔ عمودی خط $x =$ ثابت کا کوئی میلان نہیں ہوتا۔

سوال 6

صابن کی طلب $p = 15 - \frac{7}{6}q$ اور رسد $p = \frac{2}{3}q$ ہے۔ توازنی مقدار اور توازنی قیمت نکالیے۔

حل

منڈی وہاں صاف ہوتی ہے جہاں طلب اور رسد برابر ہوں:

$$15 - \tfrac{7}{6}q = \tfrac{2}{3}q \xrightarrow{\times 6} 90 - 7q = 4q \implies q^* = \tfrac{90}{11} \approx 8.18$$

$$p^* = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{90}{11} = \tfrac{60}{11} \approx 5.45$$

✓ **پڑتال:** طلب کی طرف سے بھی: $15 - \frac{7}{6} \cdot \frac{90}{11} = 15 - \frac{105}{11} = \frac{60}{11}$۔ دونوں منحنی متفق ہیں۔

جواب: $q^* = \frac{90}{11} \approx 8.18$ اکائیاں، $p^* = \frac{60}{11} \approx \$5.45$

سوال 7

خط کی مساوات نکالیے: **(الف)** $(-1,3)$ سے گزرے اور $y=4x-5$ کے متوازی ہو؛ **(ب)** $(-5,4)$ سے گزرے اور $2y=x+1$ پر عمود ہو؛ **(ج)** $(2,-8)$ سے گزرے اور $x=-4$ کے متوازی ہو۔

حل

(الف) متوازی خطوط کا میلان ایک: $m=4$۔

$$y-3=4(x+1) \implies y=4x+7$$

(ب) $2y=x+1$ یعنی $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$، میلان $\frac{1}{2}$۔ عمود کا میلان منفی معکوس $:= -2$

$$y-4=-2(x+5) \implies y=-2x-6$$

(ج) $x=-4$ عمودی خط ہے، جس کا میلان ہوتا ہی نہیں۔ اس کے متوازی خط بھی عمودی ہو گا اور دیے گئے نقطے کی x قدر سے گزرے گا: $x=2$ ۔

جواب: (الف) $y=4x+7$ (ب) $y=-2x-6$ (ج) $x=2$

عام غلطی

حصہ (ج) اکثر امیدواروں کو پکڑ لیتا ہے۔ $m_1m_2=-1$ عمودی خطوط پر لاگو نہیں ہوتا۔ جواب $x=$ ثابت ہے، اور ثابت نقطے کی x قدر سے آتا ہے، y سے نہیں۔

یونٹ 5: میٹرکس

سوال 8

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&3\\3&4&5\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&4&3\\3&-3&-2\end{pmatrix}$ کے لیے AB نکالیے، اور تصدیق کیجیے کہ $(A+B)^t=A^t+B^t$۔

حل

A کی سطر کو B کے ستون سے ضرب دیجیے۔ پہلی سطر $(1,2,3)$ کے لیے:

$$4+2+9=15, \qquad -1+8-9=-2, \qquad 1+6-6=1$$

اسی طرح باقی سطریں:

$$AB=\begin{pmatrix}15 & -2 & 1\\ 3 & -16 & -13\\ 31 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

تصدیق: $A+B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}$ لہذا $(A+B)^t=\begin{pmatrix}5 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 3\end{pmatrix}$، اور

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

دونوں برابر ہیں۔

جواب: $AB=\begin{pmatrix}15 & -2 & 1\\ 3 & -16 & -13\\ 31 & -2 & 5\end{pmatrix}$؛ تصدیق مکمل۔

عام غلطی

$(AB)^t=B^tA^t$ ہے، A^tB^t نہیں --- اور اسی طرح $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$۔ دونوں میں ترتیب الٹ جاتی ہے۔ یہ رواج نہیں، ابعاد کے میل کی مجبوری ہے۔

یونٹ 6: محدد اور معکوس

ہم عامل، معکوس، کریمر

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$؛ علامتوں کا نقشہ $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$۔

$$\det A = \sum_j a_{ij} C_{ij}, \qquad \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^t, \qquad A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

کریمر: $x_k = \dfrac{D_k}{D}$، جہاں D_k میں kواں ستون b سے بدلا جاتا ہے۔ شرط $D \neq 0$۔ سب سے زیادہ صفر والی سطر سے پھیلائیے؛ دو یکساں سطریں ہوں تو $\det = 0$۔

سوال 9

محدد نکالیے: **(الف)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ **(ب)** $\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ b & 2b & b \\ c & c & 2c \end{vmatrix}$

حل

(الف) دوسری سطر میں ایک صفر ہے، اسی سے پھیلائیے:

$$2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(5) - 3(5) - (-5) = 0$$

محدد کا صفر ہونا بتاتا ہے کہ سطریں آپس میں وابستہ ہیں۔

(ب) ہر سطر سے مشترک عامل باہر نکالیے:

$$abc\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = abc\big[2(3) - 1(1) + 1(-1)\big] = 4abc$$

جواب: (الف) 0 (ب) $4abc$

سوال 10

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ کا معکوس ہم عاملوں کے طریقے سے نکالیے۔

حل

$$\det A = 1(36-25) - 2(12-5) + 3(5-3) = 11 - 14 + 6 = 3 \neq 0$$

ہم عامل نکال کر منقلب لیجیے --- یہی ملحقہ ہے:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ **پڑتال:** A کی پہلی سطر $(1,2,3)$ ضرب A^{-1} کا پہلا ستون $\frac{1}{3}(11,-7,2)^t$: $\frac{11-14+6}{3} = 1$۔ تیسری سطر $(1,5,12)$ اسی ستون سے: $\frac{11-35+24}{3} = 0$۔

جواب: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

عام غلطی

ملحقہ ہم عاملوں کے میٹرکس کا **منقلب** ہے۔ منقلب بھول جانے سے $AA^{-1} = I$ خاص طور پر غیر قطری خانوں میں ٹوٹتا ہے --- اسی لیے پڑتال ایک غیر قطری خانے پر بھی کیجیے، صرف قطری پر نہیں۔

سوال 11

کریمر کے اصول سے حل کیجیے: $x + y = 2$، $2x - z = 1$، $2y - 3z = -1$

حل

سب سے پہلے غائب متغیرات کے صفر عامل لکھ لیجیے، ورنہ اعداد غلط ستون میں چلے جائیں گے:

$$x+y+0z=2, \qquad 2x+0y-z=1, \qquad 0x+2y-3z=-1$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&-1\\0&2&-3\end{vmatrix}=1(0+2)-1(-6-0)+0=8$$

$$D_x=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\-1&2&-3\end{vmatrix}=8, \qquad D_y=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&-1\\0&-1&-3\end{vmatrix}=8, \qquad D_z=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&0&1\\0&2&-1\end{vmatrix}=8$$

$$x=\tfrac{8}{8}=1, \qquad y=1, \qquad z=1$$

✓ **پڑتال:** $1+1=2$؛ $2(1)-1=1$؛ $2(1)-3(1)=-1$۔ تینوں درست۔

جواب: $x=1$، $y=1$، $z=1$

عام غلطی

کریمر لگانے سے پہلے ہمیشہ D نکالیے۔ $D=0$ ہو تو یہ اصول لاگو نہیں ہوتا، اور درست جواب اعداد نہیں بلکہ نظام کے بارے میں بیان ہوتا ہے: "کوئی حل نہیں" یا "لامتناہی حل"۔

یونٹ 7: حد اور تفرق

سوال 12

حد نکالیے: **(الف)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x^2-x-6}$ **(ب)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{x^3-1}$

حل

(الف) تعویض سے $\frac{0}{0}$ آتا ہے، لہذا تحلیل کیجیے:

$$x^4-81=(x-3)(x+3)(x^2+9), \qquad x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

مشترک عامل $(x-3)$ منسوخ:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x^2+9)}{x+2}=\frac{(6)(18)}{5}=\frac{108}{5}=21.6$$

(ب) اوپر اور نیچے دونوں کو x^3 سے تقسیم کیجیے:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}-3}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{-3}{1}=-3$$

مختصر راستہ: برابر درجے کے کثیر رقمی کسر کی حد سرکردہ عاملوں کا تناسب ہوتی ہے۔

جواب: (الف) $\frac{108}{5}=21.6$ (ب) -3

سوال 13

x اکائیوں کی لاگت $C(x)=x^2-5x+80$ ہے۔ **(الف)** 10 اور 15 کے درمیان تبدیلی کی اوسط شرح، اور **(ب)** 12 اکائیوں پر آنی شرح نکالیے۔

حل

(الف) اوسط شرح دو نقطوں کو ملانے والے وتر کا میلان ہے:

$$C(15)=230,\qquad C(10)=130 \implies \frac{230-130}{15-10}=\frac{100}{5}=20$$

(ب) آنی شرح مشتق ہے --- یہی حاشیائی لاگت ہے:

$$C'(x)=2x-5 \implies C'(12)=24-5=19$$

جواب: (الف) 20 فی اکائی (ب) 19 فی اکائی

عام غلطی

"اوسط شرح" کے لیے دو نقطے اور تفریق چاہیے؛ "آنی شرح" کے لیے ایک نقطہ اور مشتق۔ یہ الگ مقداریں ہیں اور یہاں الگ جواب دیتی ہیں (20 بمقابلہ 19)۔

یونٹ 8: جزوی مشتق

سوال 14

ایک کمپنی کا منافع $P(x,y) = 1200 + 80x - 2x^2 + 100y - y^2$ ہے، جہاں x محنت اور y اشیا کی فی اکائی لاگت ہے۔ منافع کو زیادہ سے زیادہ کرنے والے x، y اور زیادہ سے زیادہ منافع نکالیے۔

حل

xy کی رقم موجود نہیں، اس لیے دونوں متغیر الگ الگ بہتر ہوتے ہیں:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 80 - 4x = 0 \Rightarrow x = 20, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 100 - 2y = 0 \Rightarrow y = 50$$

دوسرے مشتق کی جانچ: $P_{xx} = -4$، $P_{yy} = -2$، $P_{xy} = 0$، لہذا

$$D = (-4)(-2) - 0 = 8 > 0 \text{ اور } P_{xx} < 0 \implies \text{اعظم}$$

$$P(20,50) = 1200 + 1600 - 800 + 5000 - 2500 = 4500$$

✓ **پڑتال:** کسی بھی متغیر کو ہلانے سے منافع گھٹتا ہے: $P(21,50) = 4498$، $P(20,51) = 4499$۔

جواب: $x = 20$، $y = 50$؛ زیادہ سے زیادہ منافع 4,500۔

یونٹ 9: بہتر بندی

کاروبار کے چار فعل

$$R(x) = x\,p(x), \qquad P(x) = R(x) - C(x), \qquad \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

حاشیائی روپ مشتق ہیں: $MR = R'$، $MC = C'$۔ منافع وہاں اعظم ہوتا ہے جہاں $P' = 0$ یعنی $MR = MC$، بشرطیکہ $P'' < 0$ ہو۔

سوال 15

کل لاگت $c = 0.03x^2 + 8x + 300$ ہے۔ کس پیداوار پر فی اکائی اوسط لاگت کم سے کم ہو گی؟

حل

$$\bar{c}(x) = \frac{0.03x^2 + 8x + 300}{x} = 0.03x + 8 + \frac{300}{x}$$

$$\bar{c}\,'(x) = 0.03 - \frac{300}{x^2} = 0 \implies x^2 = 10{,}000 \implies x = 100$$

(مثبت جڑ، کیونکہ پیداوار منفی نہیں ہو سکتی۔) $\bar{c}\,'' = \frac{600}{x^3} > 0$، لہذا یہ اصغر ہے۔

$$\bar{c}(100) = 3 + 8 + 3 = 14$$

✓ **پڑتال:** اصغر پر حاشیائی لاگت اوسط لاگت کے برابر ہوتی ہے: $c'(100) = 0.06(100) + 8 = 14$۔ یہ ہمیشہ سچ ہے اور بہترین پڑتال ہے۔

جواب: 100 اکائیوں پر، جہاں اوسط لاگت \$14 فی اکائی ہے۔

سوال 16

طلب $p = 52 - 0.02x$ اور لاگت $c(x) = 400 + 40x$ ہے۔ کس پیداوار پر منافع اعظم ہو گا؟ قیمت اور منافع کتنا ہو گا؟

حل

$$R(x) = x(52 - 0.02x) = 52x - 0.02x^2$$

$$P(x) = R - c = 52x - 0.02x^2 - 400 - 40x = 12x - 0.02x^2 - 400$$

$$P'(x) = 12 - 0.04x = 0 \Rightarrow x = 300, \qquad P'' = -0.04 < 0 \text{ (اعظم)}$$

$$p = 52 - 0.02(300) = 46, \qquad P(300) = 3600 - 1800 - 400 = 1400$$

✓ **پڑتال:** $MR = MC$ سے بھی: $52 - 0.04x = 40$ دیتا ہے $x = 300$ --- وہی پیداوار، مگر معاشی اصول سے۔

جواب: پیداوار 300 اکائیاں، قیمت \$46، منافع \$1,400۔

عام غلطی

اعظم منافع اور اعظم آمدنی ایک چیز نہیں۔ یہاں آمدنی $x = 1300$ پر عروج پر ہوتی ہے، جو منافع بخش 300 سے بہت آگے ہے۔ اسی فعل کو بہتر کیجیے جس کا نام سوال میں ہو۔

فارمولا شیٹ

احتمال اور بے ترتیب متغیر (یونٹ 2--1)

اصول	فارمولا	کب
متمم	$P(A') = 1 - P(A)$	"کم از کم ایک"، "نہیں"
جمع (عام)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	"یا"، اشتراک موجود
جمع (خارج)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	"یا"، $A \cap B = \varnothing$
ضرب (آزاد)	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$	"اور"، واپسی کے ساتھ
ضرب (وابستہ)	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$	"اور"، بغیر واپسی
مشروط	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	"بشرطیکہ"
آزادی کی جانچ	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$	آزادی ثابت یا رد کرنے کو
دو ذی حدی	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $E(X) = np$	ثابت p، واپسی کے ساتھ
تقسیم کی شرط	$\sum_x P(X = x) = 1$, $E(X) = \sum_x x\,P(X = x)$	ہمیشہ --- پڑتال کے طور پر

مساوات اور خطوط (یونٹ 4--3)

دو درجی فارمولا	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$؛ ممیز $0 >$ دو جڑیں، $0 =$ ایک، $0 <$ کوئی حقیقی نہیں
عدم مساوات	منفی عدد سے ضرب یا تقسیم پر علامت الٹ جاتی ہے
مطلق قدر	$\lvert u\rvert = \lvert v\rvert \iff u = \pm v$؛ $\lvert u\rvert \le a \iff -a \le u \le a$ (ایک وقفہ)؛ $\lvert u\rvert \ge a$ (دو وقفے)
فاصلہ، وسطی نقطہ	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$، $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
میلان اور خط	$m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$، $y - y_1 = m(x-x_1)$، $y = mx + c$
متوازی / عمود	$m_1 = m_2$؛ $m_1 m_2 = -1$ --- عمودی خطوط پر لاگو نہیں
خطی لاگت	$C(x) =$ (فی اکائی متغیر) $x +$ (ثابت لاگت)
توازن	طلب = رسد رکھ کر q نکالیے، پھر p میں تعویض

میٹرکس اور محدد (یونٹ 6--5)

ابعاد کا میل	$A_{m\times n}B_{n\times p}$ ممکن، نتیجہ $m \times p$
ترتیب الٹتی ہے	$\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$، $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$
2×2	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$، معکوس $= \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
ہم عامل	$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$؛ علامتیں $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$
محدد	$\det A = \sum_j a_{ij}C_{ij}$ کسی بھی سطر یا ستون سے
ملحقہ اور معکوس	$\operatorname{adj} A = [C_{ij}]^t$، $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{\det A}$، شرط $\det A \neq 0$
کریمر کا اصول	$x_k = \dfrac{D_k}{D}$؛ D_k میں kواں ستون b سے بدلیں
$\det = 0$ کا مطلب	منفرد حل نہیں: یا کوئی حل نہیں، یا لامتناہی
مختصر راستے	زیادہ صفر والی سطر سے پھیلائیں؛ مشترک عامل باہر؛ دو یکساں سطریں $\Rightarrow \det = 0$

کیلکولس (یونٹ 9--7)

قوت، حاصل ضرب	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$، $(uv)' = u'v + uv'$
تقسیم	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ --- اوپر والے کا مشتق پہلے
زنجیری	$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$ --- باہر پہلے، پھر اندر سے ضرب
تفاعلی، لاگ	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u u'$، $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{u'}{u}$
حدیں	∞ پر: نسب نما کی بڑی قوت سے تقسیم۔ $\frac{0}{0}$ پر: تحلیل و منسوخی
حد کا وجود	$\lim_{x\to a^-} f = \lim_{x\to a^+} f$
جزوی مشتق	ایک متغیر میں تفرق، دوسرا ثابت؛ $f_{xy} = f_{yx}$ (مفت پڑتال)
جانچ (ایک متغیر)	$f' = 0$ پر: $f'' < 0$ اعظم، $f'' > 0$ اصغر، $f'' = 0$ بے نتیجہ
جانچ (دو متغیر)	$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$؛ $D > 0$ و $f_{xx} < 0$ اعظم، $f_{xx} > 0$ اصغر؛ $D < 0$ زینی
انعطافی نقطہ	$f'' = 0$ اور f'' کی علامت بدلے
کاروباری فعل	$R = x\,p(x)$، $P = R - C$ (اعظم جہاں $MR = MC$)، $\bar{C} = \frac{C}{x}$ (اصغر پر $MC = \bar{C}$)

آٹھ عام غلطیاں

۱. **اشتراک والے واقعات پر $P(A)+P(B)$ لگانا۔** سادہ جمع کا اصول صرف باہم خارج واقعات پر چلتا ہے؛ ورنہ اشتراک گھٹائیے۔

۲. **"صرف ایک" میں گنتی بھول جانا۔** $\binom{n}{1}$ یہ گنتا ہے کہ وہ ایک کون ہے۔ "سب" اور "کوئی نہیں" میں یہ ضرب نہیں لگتی۔

۳. **"بغیر واپسی" پر دو ذی حدی لگا دینا۔** یہ الفاظ hypergeometric کی طرف اشارہ ہیں اور جواب بدل دیتے ہیں۔

٤. **منفی عدد سے ضرب یا تقسیم پر عدم مساوات کی علامت نہ الٹنا۔** نیز $|u| \le a$ ایک وقفہ دیتا ہے اور $|u| \ge a$ دو۔

٥. $(AB)^t = A^tB^t$ **یا** $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ **لکھنا۔** دونوں میں ترتیب الٹ جاتی ہے۔

٦. **ملحقہ بناتے وقت ہم عاملوں کا منقلب بھول جانا۔** پڑتال کسی غیر قطری خانے پر کیجیے، صرف قطری پر نہیں۔

٧. **کریمر لگانے سے پہلے D نہ نکالنا۔** $D=0$ پر اصول لاگو نہیں ہوتا۔ نیز غائب متغیرات کے صفر عامل پہلے لکھ لیجیے۔

٨. $f'=0$ **پر رک جانا۔** دوسرے مشتق کی جانچ ہی اعظم، اصغر اور زینی نقطے میں فرق کرتی ہے، اور اس کے نمبر الگ ملتے ہیں۔

اگر وقت کم ہو۔ یہ پانچ مہارتیں حل ڈھانپ کر دہرائیے: (1) 3×3 نظام پر کریمر کا اصول؛ (2) ہم عاملوں سے 3×3 کا معکوس؛ (3) حاصل ضرب، تقسیم اور زنجیری اصول؛ (4) منافع یا اوسط لاگت کی بہتر بندی، دوسرے مشتق کی جانچ سمیت؛ (5) دو نقطوں یا عمودیت کی شرط سے خط کی مساوات۔ پانچ مہارتیں جو بغیر دیکھے درست آ جائیں، نو یونٹ سرسری پڑھ لینے سے زیادہ قیمتی ہیں۔

مزید تفصیل۔ 27 سوالات کا اردو ایڈیشن AIOU_1429_Urdu_Guess_Paper.pdf؛ مکمل انگریزی حل AIOU_1429_Solved_QuestionBank.pdf۔ **ماخذ:** کاروباری ریاضی، کورس کوڈ 5405/1429، یونٹ 1--9، اے آئی او یو اسلام آباد، اشاعت 2023۔